ECOLE SUPERIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUEES

ESLSCA

INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE

ISC

Concours d'admission de 1994

MATHÉMATIQUES I

Option Générale.

Le Lundi 30 Mai 1994 , de 8h. à 12 h.

Sont autorisées :

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

EXERCICE 1 (5 points)

On définit les deux matrices, considérées comme étant à coefficients complexes, suivantes :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ; J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ et on pose : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} = \cos\frac{2\pi}{5} + i.\sin\frac{2\pi}{5}$.

1°) Calculer J^n pour toute valeur de l'entier naturel n. Donner en particulier la valeur de J^5 et exprimer A à l'aide de puissances de J.

2°) i) Déterminer les valeurs propres de J et donner pour chacune d'entre elles un vecteur colonne propre dont la première coordonnée soit un 1.

ii) En déduire que J est diagonalisable et donner, à l'aide de ω, l'expression d'une matrice de passage P telle que $P^{-1}JP$ soit diagonale.

3°) i) Dire pourquoi A est diagonalisable et donner une matrice de passage Q et une matrice diagonale Δ telles que : $A = Q\Delta Q^{-1}$.

ii) La limite d'une suite de matrices s'entendant coefficient par coefficient, montrer que (Δ^n) a une limite lorsque n tend vers l'infini et calculer cette limite. En déduire que (A^n) a une limite lorsque n tend vers l'infini.

iii) Montrer que pour toute valeur de l'entier naturel n, la somme des éléments de toute rangée de A^n vaut 1, en déduire la valeur de $\lim_{n\to\infty} A^n$.

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne contient initialement n boules numérotées depuis 1 jusqu'à n, avec $n \geq 2$. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une à une, au hasard et sans remise.

1°) i) Pour i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au $i^{ème}$ tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire. Quelle est la loi de X_i ?

ii) En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue, lorsque l'on vide l'urne.

2°) Pour k compris entre 1 et n, on dit que le résultat du $k^{ème}$ tirage est un "record" si la boule obtenue à ce $k^{ème}$ tirage porte un numéro strictement supérieur à tous les numéros obtenus jusqu'alors. (par convention, le résultat du premier tirage sera toujours considéré comme un record).

i) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne et pour lesquelles il n'y a qu'un seul record ? Pour lesquelles il y a n records ?

ii) Montrer que pour p et q entiers naturels, on a la relation suivante :

$$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+q}^p = C_{p+q+1}^{p+1}.$$

(où C_n^m est le nombre de parties à m éléments d'un ensemble à n éléments)

iii) Soit k fixé entre 2 et n et j fixé entre k et n. Combien existe-t-il de façons de vider l'urne, pour lesquelles la $k^{ème}$ boule obtenue porte le numéro j et le $k^{ème}$ tirage constitue un record ?

iv) Combien existe-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le $k^{ème}$ tirage est un record ? En déduire la probabilité que le $k^{ème}$ tirage soit un record. Pouvait-on obtenir ce résultat directement ?

3°) Pour k compris entre 1 et n, soit Y_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat du $k^{ème}$ tirage est un record et 0 sinon. Déterminer la loi de Y_k. Soit R le nombre aléatoire de records obtenus lorsque l'on vide l'urne. Déterminer l'espérance de R.

PROBLEME (10 points)

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : Si $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)$; sinon, $f(x) = 0$.

(exp désignant la fonction exponentielle de base e)

1°) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}$.

3°) Plus généralement montrer, par récurrence, que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $]-1, 1[$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme : $f(x).\frac{P_n(x)}{(x^2 - 1)^{2n}}$, où P_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

4°) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 et au voisinage de 0 de f.

5°) Soit : $C = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. En partageant l'intervalle [0, 1] en dix parties égales, déterminer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée du nombre $\frac{C}{2}$. Donner un majorant de l'erreur commise.

Partie II

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{C} \int_{2(x-1)}^{2(x+1)} f(t)\,dt$. (C et f sont définies en I, et on a donc : $g(x) = \frac{1}{C} \int_{u}^{v} f(t)\,dt$, avec $u = 2(x - 1)$ et $v = 2(x + 1)$)

1°) Montrer que g est une fonction paire.

2°) Calculer g(x) lorsque x appartient à [0, 1/2], puis lorsque x appartient à [3/2, +∞[.

3°) Que vaut g(1) ?

4°) Soit h la restriction de g à]1/2, 3/2[. Montrer que h est dérivable, calculer h'(x) et en déduire les variations de h.

5°) Montrer que la courbe représentative de h, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, possède un centre de symétrie S. Préciser les coordonnées de S.

6°) Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit (Γ) la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé, tracer (Γ). (On précisera la concavité de (Γ))

7°) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$.

Partie III

Soit a, b, c, d quatre nombres réels vérifiant : $c < a < b < d$ et $a - c = d - b$. On cherche une fonction φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telle que :

i) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

ii) $\forall x \in [a, b], \varphi(x) = 1$.

iii) $\forall x \in]-\infty, c] \cup [d, +\infty[, \varphi(x) = 0$.

On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{C} \int_{\alpha x + \beta}^{\alpha x + \delta} f(t)\,dt$. Déterminer α, β, δ pour que φ satisfasse aux conditions imposées.